

Chapitre II: Induction *Électromagnétique*

Dans ce chapitre on va voir dans quelles conditions un champ magnétique peut créer un courant électrique. C'est le phénomène d'induction électromagnétique, dont les applications sont très nombreuses: alternateur de centrale électrique, transformateur, chauffage par induction, etc.

Régime stationnaire

1. Electrostatique

Dans les états stationnaires, le champ électrique est appelé champ électrostatique. Le champ électrostatique \vec{E} créé par une distribution de charges de densité ρ située dans le vide, et à circulation conservative, c'est-à-dire qu'il satisfait les relations intégrale et locale :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{rot}(\vec{E}) = 0$$

Où (Γ) est un contour fermé quelconque orienté.

Il satisfait également les relations intégrale et locale:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(\tau)} \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau \quad \text{ou} \quad \text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Où (S) est une surface fermée et (τ) le volume intérieur à (S) .

$\epsilon_0 = 8.854187817 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$ est la permittivité du vide

2 Electrocinétique

- **Champ électromoteur**

Lorsqu'un courant électrique circule dans un conducteur, cela implique l'existence d'une force \vec{f}_m agissant sur les porteurs de charge q et l'on définit le champ électromoteur \vec{E}_m :

$$\vec{E}_m = \frac{\vec{f}_m}{q}$$

La circulation de ce champ le long d'un contour fermé orienté (Γ) n'est pas conservative, c'est-à-dire qu'elle est **différente de zéro**. Par définition cette circulation est appelée la force électromotrice **e** relative au contour considéré :

$$e = \oint_{(\Gamma)} \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

3 Magnétostatique

Le champ magnétique

- Le champ magnétique créé par une distribution de courants de densité \vec{j} est à flux conservatif, c'est-à-dire qu'il satisfait les

relations intégrale et locale : $\iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ Ou $\text{div}(\vec{B}) = 0$

Théorème Gauss-Ostrogradski

où (S) est une surface fermée quelconque.

- Le champ magnétique satisfait les relations intégrale et locale :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

En tenant compte du théorème de Stokes :

$$\iint \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}}$$

Le régime variable:

Le régime variable est caractérisé par des propriétés spécifiques liées à la dépendance des champs en fonction du temps. Ces particularités sont : **Le phénomène de capacité, le phénomène de propagation et le phénomène d'induction**

Le phénomène d'induction

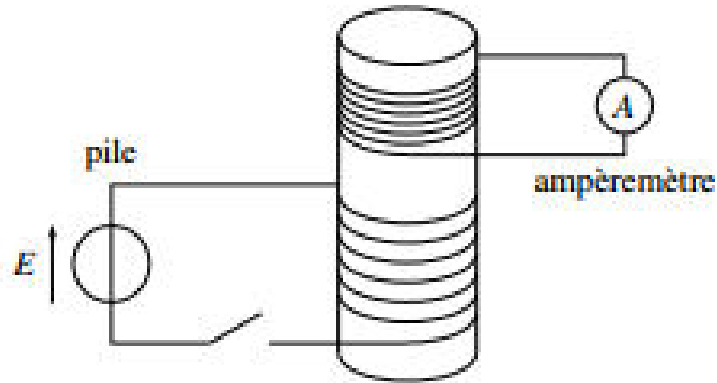
Un circuit filiforme au **repos** et parcouru par un courant **invariable** n'entraîne l'apparition d'aucune f.é.m ou d'aucun courant dans un autre circuit filiforme au repos.

Il n'en est pas de même si le courant **varie** ou si les circuits en présence se **déplacent** l'un par rapport à l'autre : la f.é.m ou le courant qui apparaissent sont dû au phénomène d'induction.

Ce phénomène entraîne l'apparition d'un champ électrique supplémentaire (**appelé champ induit**) ; ce qui conduit à modifier la propriété fondamentale du champ électrique.

1 Expériences d'induction électromagnétique

1.1 Expérience historique de Faraday



Expérience de Faraday

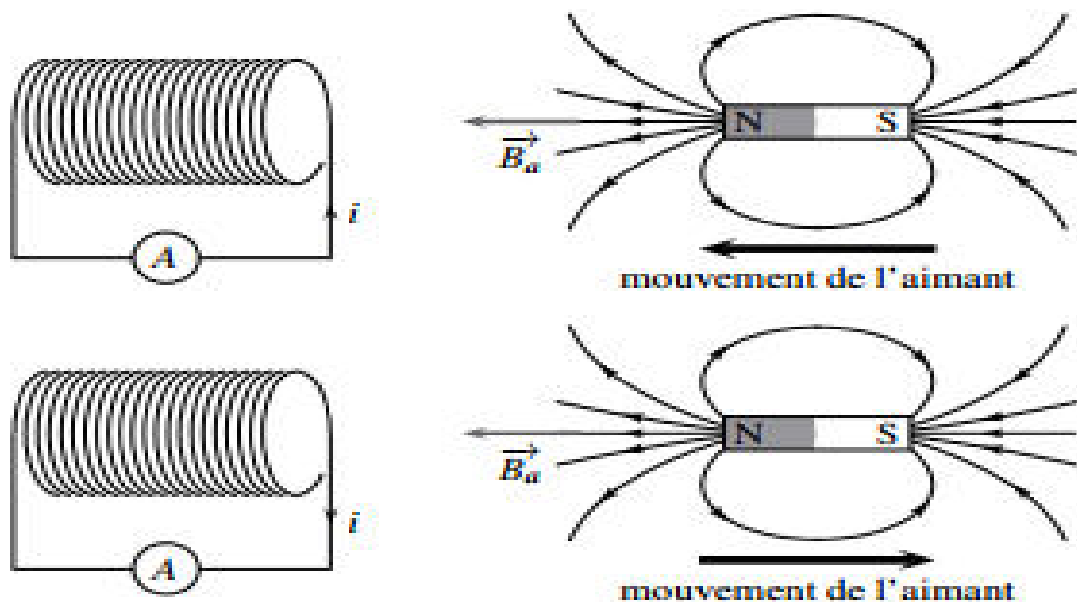
Deux enroulements de fils sur un cylindre en Fer étaient reliés l'un à une pile par l'intermédiaire d'un interrupteur, l'autre à un ampèremètre.

Après la fermeture de l'interrupteur :

La **variation** du courant dans le premier circuit était à l'origine du courant électrique détecté dans le second. Il publia ses résultats en 1831.

Faraday utilisa cette découverte pour construire le premier générateur électrique de courant alternatif

1.2 Expérience avec un aimant et une bobine



Courant induit par un aimant en déplacement. La flèche indique le sens réel du courant induit.

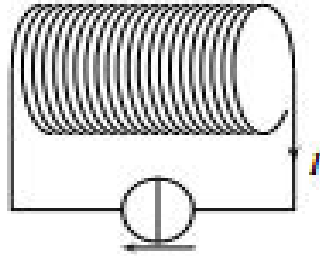
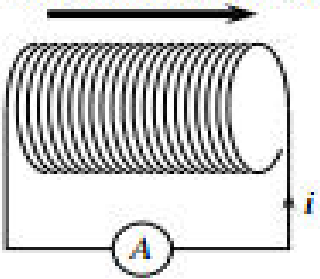
l'apparition d'un courant dans la bobine dans le sens indiqué sur la figure ; ce courant est appelé **courant induit**. Il est d'autant plus fort que l'aimant avance vite.

Si on éloigne l'aimant, le courant est dans l'autre sens. Si on retourne l'aimant et qu'on avance le pôle sud de l'aimant vers la bobine, le sens du courant est le même que quand on éloigne le pôle nord.

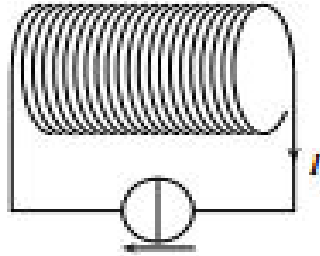
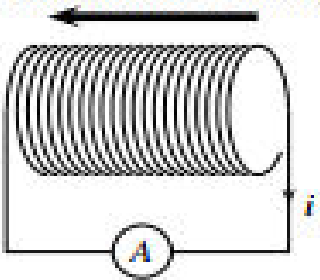
1.3 Expérience avec deux bobines

on remplace l'aimant par une bobine alimentée par un générateur de courant qui impose une intensité I constante

mouvement de la bobine



mouvement de la bobine



Courant induit par déplacement d'une bobine. La flèche indique le sens réel du courant.

Création un courant dans l'autre bobine non alimentée. Le courant induit dans la deuxième bobine est de sens opposé au courant dans la première bobine quand on rapproche les deux bobines et de même sens quand on les éloigne.

1.4 Interprétation:

Ces expériences mettent en évidence le phénomène **d'induction électromagnétique** qui se manifeste par l'apparition d'un courant dans un circuit fermé sans qu'il y ait de générateur dans le circuit.

Conclusion :

La condition pour voir un **phénomène d'induction** dans un circuit est que *le champ magnétique « traversant le circuit »* **varie dans le temps**. Cette variation peut avoir deux causes :

1. le circuit est plongé dans un champ **magnétique variable**,
2. **le circuit se déplace** dans un champ magnétique.

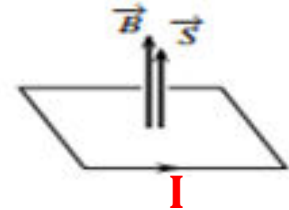
2 Loi de Faraday

La loi de Faraday est l'équation qui régit le phénomène d'induction. Cette loi fait intervenir une grandeur liée au circuit et au champ magnétique dans lequel il est placé : **Le flux magnétique**

2.1 Flux magnétique

a) Flux d'un champ magnétique uniforme à travers une spire plane

Soit une spire plane de forme quelconque placée dans un champ magnétique uniforme \vec{B} . On suppose qu'un sens positif conventionnel pour le courant circulant dans la spire a été choisi.



Par définition :

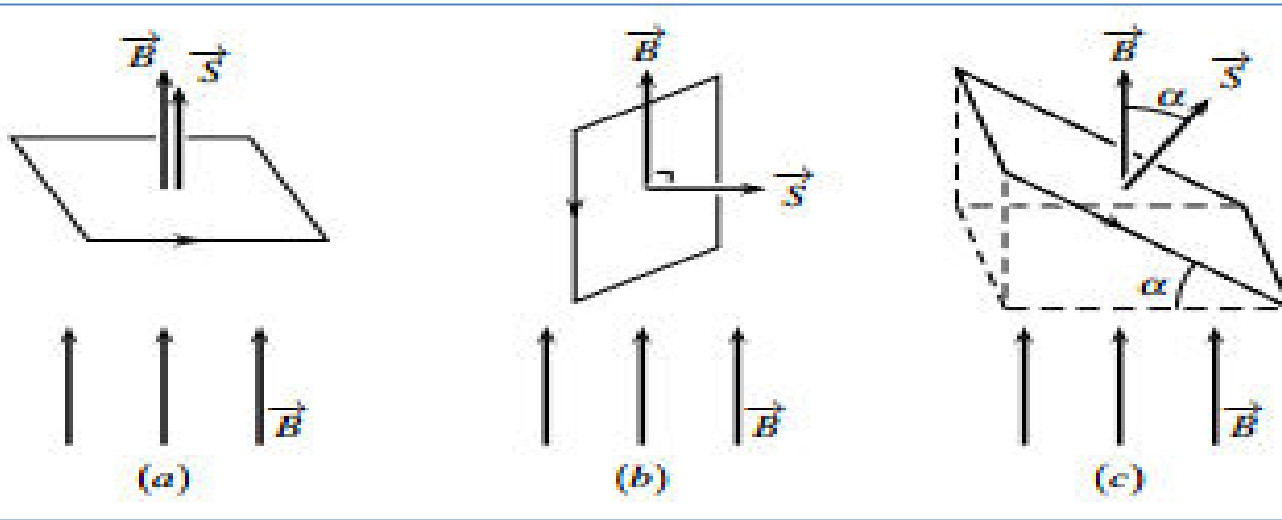
Le **flux magnétique** traversant la spire est : $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$

Où \vec{S} est le vecteur surface de la spire $\vec{S} = S \cdot \vec{n}$

P.S: Le flux magnétique est une grandeur algébrique. Son signe dépend du choix d'orientation de la spire et il est changé en son opposé si le champ magnétique change de sens.

Exemple

On considère une spire rectangulaire de surface S placée dans un champ magnétique uniforme vertical \vec{B} de norme B



Flux du champ magnétique
à travers une spire
rectangulaire

- Dans le cas (a): $\Phi = B.S.\cos(0) = B.S \Rightarrow$ La spire offre une surface S au champ
- Dans le cas (b): $\Phi = B.S.\cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow$ Le champ magnétique ne traverse pas la spire.
- Dans le cas (c) : $\Phi = B.S.\cos(\alpha) \Rightarrow$ La surface offerte au champ magnétique est seulement projection de S sur un plan perpendiculaire \vec{B} qui vaut $S.\cos \alpha$.

b) Flux d'un champ magnétique **uniforme** à travers une bobine

Le flux magnétique à travers une bobine est égal à la somme des flux magnétiques à travers toutes ses spires: $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = NBS \cos \alpha$

PS:

Unité de flux: le Weber (*Wilhelm Weber 1804-1891*); $1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2$

c) Flux d'un champ magnétique **non-uniforme** à travers une bobine

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \text{ [Wb]}$$

$d\vec{S}$ est un élément de surface

Sur une surface fermée, le flux est nul, on dit que le flux est conservatif

$$\oiint_{S \text{ fermée}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \Leftrightarrow \text{div } \vec{B} = 0$$

2.2 Force électromotrice induit e

La variation du flux magnétique Φ à travers le circuit provoque l'apparition d'un courant dans celui-ci.

Loi de Faraday :

Le courant induit dans le circuit est égal à celui que produit un générateur fictif dont la force électromotrice e , appelée **force électromotrice induite** (en abrégé **f.é.m. induite**), est donnée par la formule :

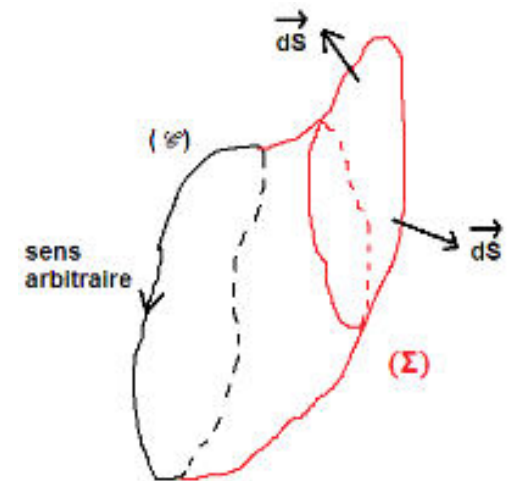
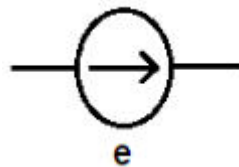
$$e = - \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{avec} \quad \Phi = \iint_{\Sigma(s' \text{ appuie sur } C)} \vec{B} \cdot \vec{dS}$$

où Φ est le flux magnétique à travers le circuit.

❖ Schématisation:

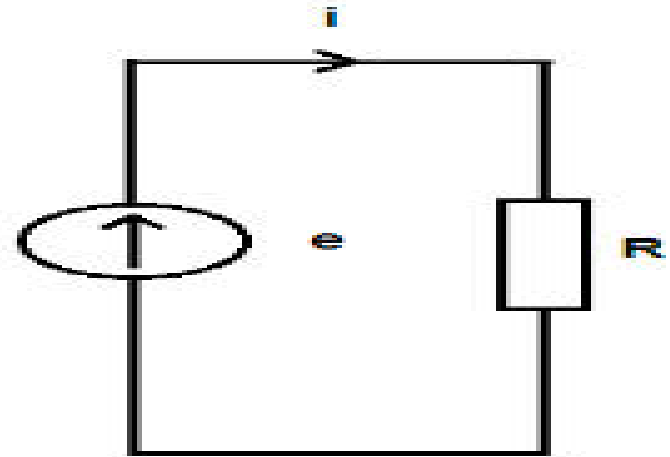
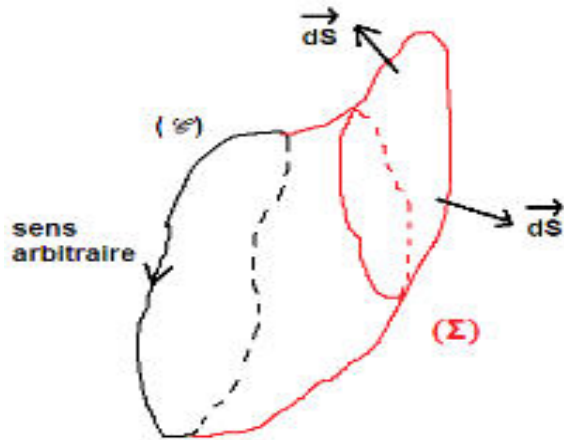
on choisit un sens arbitraire pour e

Symbole de e:



Circuit (C)

❖ Expression du courant induit



Appliquant la Loi de maille:

$$\mathbf{i} = \frac{e}{R} \quad \text{et} \quad e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

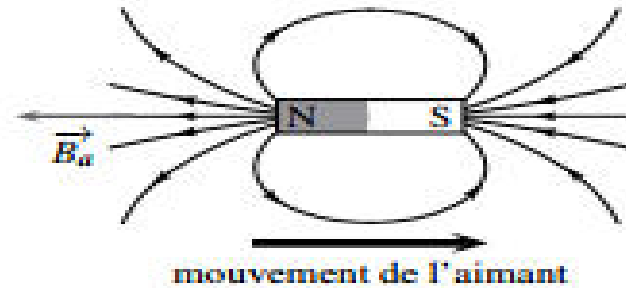
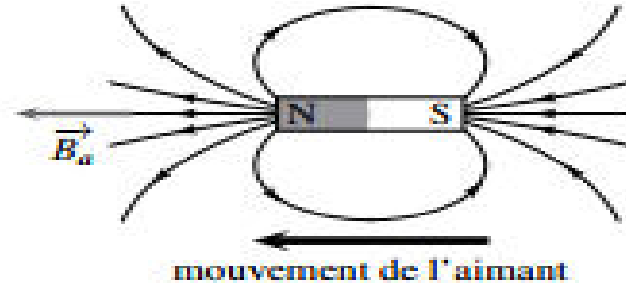
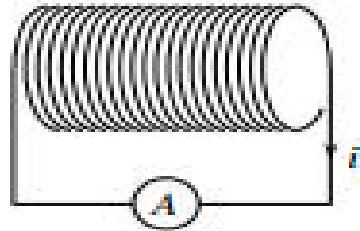
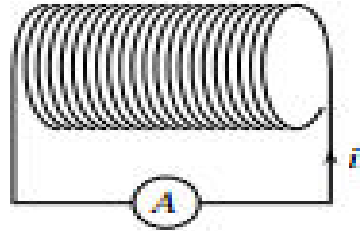
$$\mathbf{i} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$$

Si $\mathbf{i} > 0$: sens de \mathbf{i} = sens arbitraire

Si $\mathbf{i} < 0$: sens de \mathbf{i} = opposé du sens arbitraire

3 Loi de Lenz

Exemple:



- On approche l'aimant de la bobine, **la norme du champ \vec{B}_a** qu'il crée au niveau de celle-ci **augmente**;
- **Le courant induit**, qui est dans le sens indiqué sur la figure, crée un **autre champ magnétique** dirigé vers **la droite**, d'après la **règle de la main droite**, donc de sens contraire à \vec{B}_a .
- **Le courant induit** crée un champ qui **s'oppose** à l'augmentation de la norme du champ magnétique au niveau de la bobine.

C'est une manifestation de la loi de Lenz

3 Loi de Lenz

Enoncé:

Le sens du courant induit est tel qu'il crée un flux φ qui s'oppose à la variation du flux Φ qui lui a donné naissance.

C-à-d: si $\Phi \nearrow \Rightarrow \varphi$ doit être négatif ($\varphi < 0$)
si $\Phi \searrow \Rightarrow \varphi$ doit être positif ($\varphi > 0$)

$$\text{Avec } \varphi = \iint_{\Sigma(\text{sappuie sur } C)} \vec{b} d\vec{S}$$

où \vec{b} est le champ créé par le courant induit

$d\vec{S}$ orienté par le sens arbitraire

si: $\varphi > 0 \Leftrightarrow \vec{b}$ et $d\vec{S}$ ont le même sens \Leftrightarrow sens de i = sens arbitraire

si: $\varphi < 0 \Leftrightarrow \vec{b}$ s'oppose à $d\vec{S}$ \Leftrightarrow sens de $i \neq$ sens arbitraire

Vérification: on suppose que Φ augmente. Déterminons le sens de i par calcul et par loi de Lenz

$$\Phi \nearrow \Leftrightarrow \frac{d\Phi}{dt} > 0$$

Par calcul: $\mathbf{i} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} < 0$ Car $\Phi \nearrow$

Par loi de Lenz: $\Phi \nearrow \quad \varphi < 0 \Rightarrow \vec{b}$ s'oppose à \vec{dS}

} \Rightarrow Sens de i s'oppose au sens arbitraire

Exercice: Induction par déplacement dans un champ uniforme

1. On translate une spire plane placée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire. Observe-t-on un phénomène d'induction?
2. On met en rotation une spire plane placée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire. Observe-t-on un phénomène d'induction ?

1 . Quand on translate la spire, son orientation dans l'espace ne change pas donc son vecteur surface \vec{S} reste constant. Elle coupe des lignes de champ magnétique, sauf si elle est translatée parallèlement au champ \vec{B} . Cependant, le flux du champ magnétique uniforme \vec{B} , $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$, reste constant donc **la f.é.m. induite est nulle et on ne voit pas de phénomène d'induction.**

2 . Si l'on fait tourner la spire autour d'un axe fixe, l'un de ses côtés au moins coupe des lignes de champ magnétique, il y a donc induction si le flux magnétique varie. Le vecteur surface de la spire tourne de la même façon que la spire. Si elle tourne autour d'un axe parallèle au champ magnétique, le flux $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$ reste constant et on ne voit pas de phénomène d'induction. Si la spire tourne autour d'un axe non parallèle à \vec{B} , le flux varie et il y a une f.é.m. induite.

L'amplitude de variation du flux est maximale si l'axe de rotation est perpendiculaire à \vec{B} :

le flux oscille alors entre BS et $-BS$, en notant B la norme de \vec{B} et S la surface de la spire

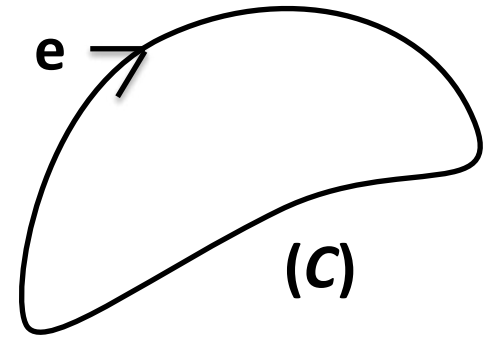
4 Equation de Maxwell-Faraday

4.1 Forme intégrale:

Considérons un circuit (C) au repos soumis à un champ variable. **Un champ électrique \vec{E}_i va prendre naissance** dans tout l'espace où existe un champ magnétique variable.

Le champ électrique induit joue un rôle de **champ électromoteur** et la **f.é.m** apparaissant dans tout le circuit (C) peut s'écrire sous deux formes:

$$e = \oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$$
$$e = \oint_{(C)} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$



$$\oint_{(C)} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\iint_{(S)} \frac{\partial (\vec{B} \cdot d\vec{S})}{\partial t} = -\iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

où (S) est une surface orientée s'appuyant sur le contour orienté (C)
 $d\vec{S}$ est défini par la règle tir bouchon sur le sens de (C)

4.2 Forme locale:

En appliquant le théorème de Stokes (rotationnel) :

$$\oint_{(C)} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{E}_i) \cdot d\vec{S} = - \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

(S) Est une surface qui s'appuie sur le contour (C)

Par analogie:

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\vec{E}_i) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Cette équation traduit localement que **toute variation temporelle de \vec{B}** est associée à **un champ électrique \vec{E}_i** . En régime variable ce champ est appelé **champ électromoteur induit** qui peut fournir du travail aux charges électriques.

4.3 Potentiel électromagnétique

(\vec{E}, \vec{B}) champ électromagnétique et (V, \vec{A}) le potentiel électromagnétique

- on rappelle qu'en **régime stationnaire** on a:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \quad \text{et} \quad \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}$$

Or, on sait que $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}f) = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = 0$

- On **régime variable** on a : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$ et $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}$

Donc $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ n'est plus valable en régime variable

D'autre part on a $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{rot}}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

Donc $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}$

Or, tout champ de vecteurs à rotationnel nul dérivant d'un gradient, il existe donc un scalaire v , **appelé potentiel**, tel que la parenthèse puisse s'écrire:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$$

Au couple (\vec{E}, \vec{B}) , on vient donc d'associer un couple (V, \vec{A}) de potentiels reliés au champ par

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\text{grad}}V \quad \text{et} \quad \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}$$

Cette relation montre qu'en régime variable les potentiels V et A sont indissociables. Aussi le couple (V, \vec{A}) est-il appelé **potentiel électromagnétique**.

5 f.é.m. induite dans le cas d'un circuit mobile

5.1 Force électromotrice induite dans un circuit mobile

Soit (C) un circuit filiforme fermé mobile et plongé dans un champ \vec{B} (Stationnaire ou variable).

Pour déterminer la f.é.m., on fait analogie avec le circuit fixe. On relie la f.é.m. induite à la force qui s'exerce sur un porteur de charges.

A La f.é.m. dans un circuit (C) fixe s'écrit :

$$e = \oint_C \vec{E} d\vec{l}$$

On rappelle que $\vec{F} = q\vec{E}$ c-à-d $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$

Avec \vec{F} : la force exercée sur le porteur de charge

$q.e$: le travail de la force qui s'exerce sur q pour faire un tour complet.

$$e = \oint_C \vec{E} d\vec{l} \Rightarrow e = \oint_C \frac{\vec{F}}{q} d\vec{l} \quad \text{càd} \quad qe = \oint_C \vec{F} d\vec{l}$$

B La f.é.m. dans un circuit (C) mobile s'écrit :

l'expression de la force change c à d: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})$ (la force de lorentz)

$$\text{Donc } e = \oint_C (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} \Rightarrow e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} + \oint_C \vec{V} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

D'après la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday, on déduit

$$e = - \iint_{\Sigma(s' \text{ appuie sur } C)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_C \vec{V} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

• Cas particulier:

Cas de circuit fixe : $\vec{V} = \vec{0}$

on retrouve donc la loi de faraday

$$e = - \iint_{\Sigma(s' \text{ appuie sur } C)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

\mathbf{e} s'écrit comme la circulation d'un champ :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{B} d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} d\vec{S}$$

Th de stokes:
$$\oint_C \vec{A} d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} d\vec{S}$$

Donc
$$e = \oint_C -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\vec{l}$$

<p>Alors $e = \oint_C -\vec{E}_m d\vec{l} \quad \text{avec} \quad \vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$</p>
--

\vec{E}_m : champ électromoteur de newman

Cas du circuit mobile

\vec{B} stationnaire c-à-d:
$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$$

$e = \oint_C (\vec{V} \wedge \vec{B}) d\vec{l}$

f.e.m de l'induction de lorentz

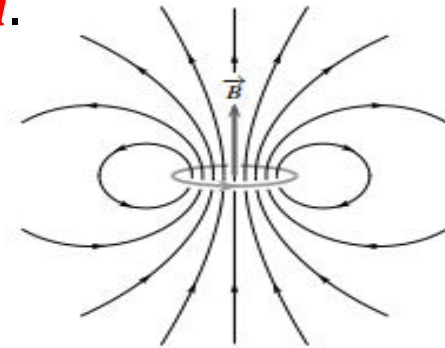
6 Circuit fixe dans un champ magnétique variable

6.1 INDUCTANCE PROPRE D'UN CIRCUIT

a) Définition

Tout circuit parcouru par un courant I crée un champ magnétique \vec{B} dans lequel il est plongé. Le flux de ce champ à travers le circuit, quand il peut être défini, est donc proportionnel à I .

$$\Phi = LI$$

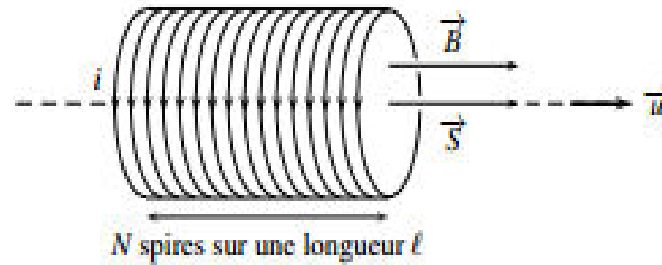


avec Φ : le flux traversant le circuit et parcouru par I

L : Self inductance (inductance propre): coefficient positif qui ne dépend que des propriétés géométriques du circuit.

l'unité de L : Henry (H)

Exemple : Calculons L_u par unité de longueur pour un solénoïde infini (n, R, l).



Le champ magnétique créé dans la bobine a pour expression : $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}$

- Le flux de ce champ à travers **une spire** du solénoïde est :

$$\varphi_{spire} = \vec{B} \cdot \vec{S} = (\mu_0 n I \vec{u}) \cdot (S \cdot \vec{u}) = \mu_0 n I S$$

- Le flux total à travers les N spires, c'est-à-dire le flux propre à travers le solénoïde, est : $\Phi = N \cdot \varphi_{spire} = N \mu_0 n I S$

On identifie alors l'expression de l'auto-inductance :

$$L = \frac{\Phi}{I} \quad \text{donc} \quad L = N \mu_0 n S$$

or Spire est un disque donc $S = \pi R^2$

Alors $L = N \mu_0 n \pi R^2$ avec $n = \frac{N}{l} \Rightarrow N = n l$

Donc $L = \mu_0 n^2 l \pi R^2$

Pour une unité de longueur on $L_u = \frac{L}{l}$

$$L_u = \mu_0 n^2 \pi R^2$$

b) Application à la modélisation de circuit électrique : Auto-induction (cas d'un seul circuit) :

Soit (C) un circuit de résistance R et d'inductance propre L , alimenté par un générateur de tension $e_G(t)$ variable (il va induire une f.é.m. Variable e)

Le modèle de circuit est :

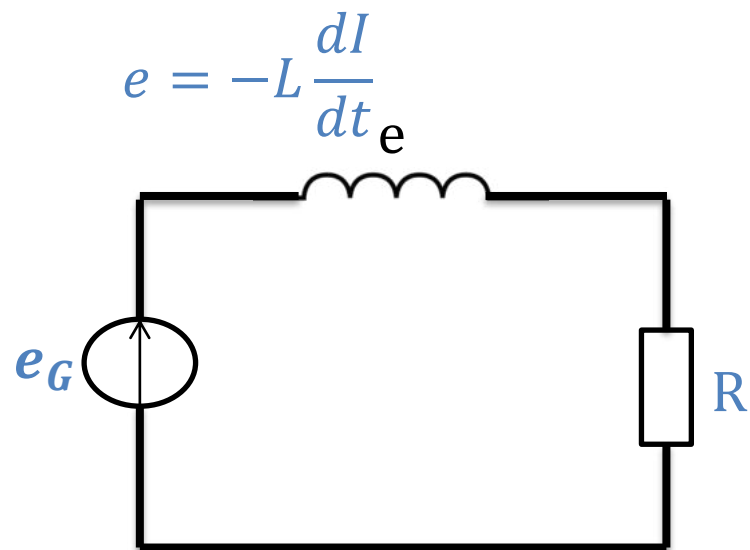
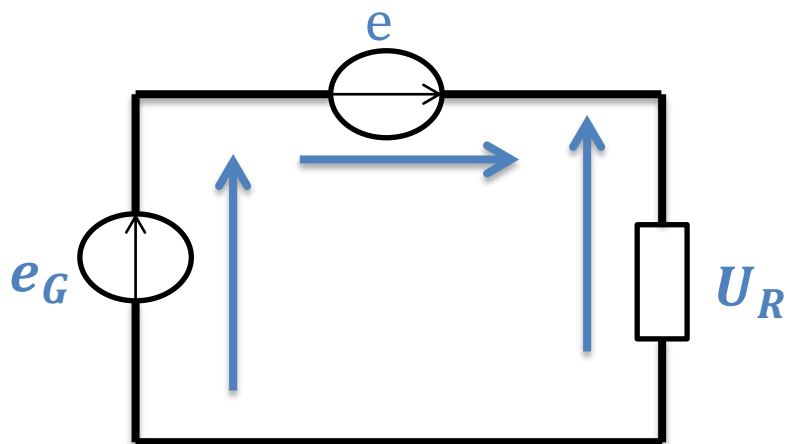
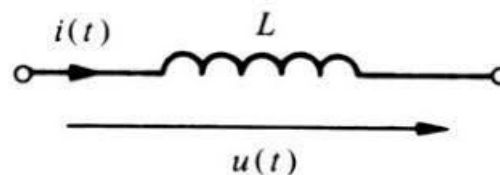


Schéma symbolique



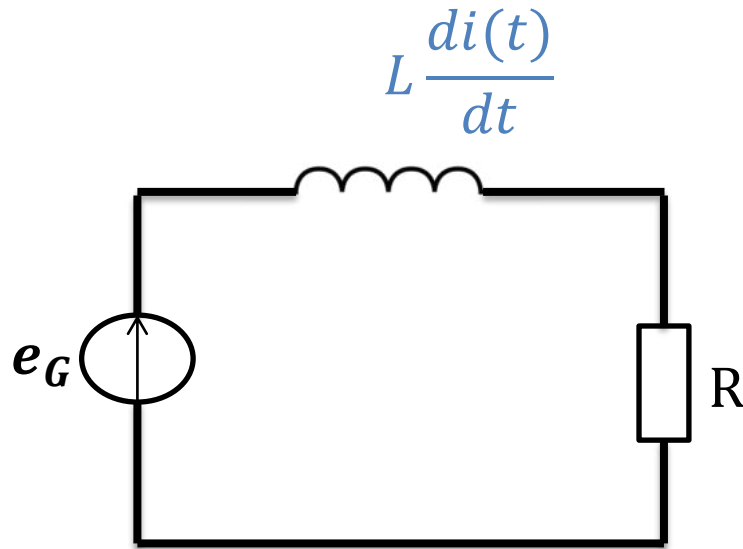
$$e_G + e - U_R = 0$$

$$e_G - \frac{d\Phi}{dt} - RI = 0$$

On a $L = \frac{\Phi}{I} \Leftrightarrow \Phi = LI$

Donc $e_G - L \frac{dI}{dt} - RI = 0$

C- bilan énergétique:



$$e_G(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t)$$

$$e_G(t) \cdot i(t) = L \frac{di(t)}{dt} i(t) + Ri^2(t)$$

$$e_G(t) \cdot i(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2(t) \right) + Ri^2(t)$$

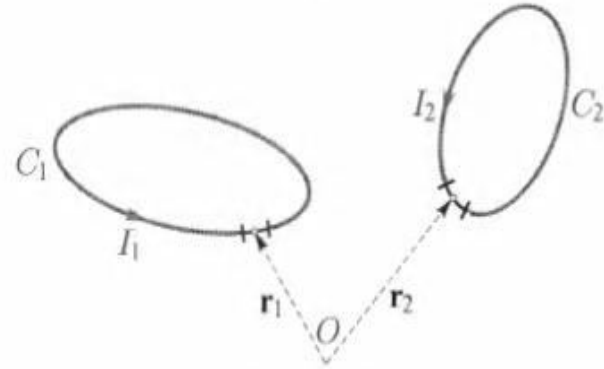
- la puissance $P_G(t) = e_G(t) \cdot i(t)$ cédée au circuit par le générateur
- la puissance $P_{joule}(t) = Ri^2(t)$, dissipée par effet Joule dans la résistance R

$$P_G(t) - P_{joule}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2(t) \right)$$

L'énergie magnétique d'un circuit d'auto-inductance L parcouru par un courant d'intensité i est : $\mathbf{E}_{mag} = \frac{1}{2} Li^2$

6. 2 INDUCTANCE MUTUELLE DE DEUX CIRCUITS

Si on considère deux circuits filiformes quelconques (C1) et (C2) parcourus respectivement par des courant I_1 et I_2 .



- Le flux du champ magnétique \vec{B}_2 , créé par (C2) à travers la surface S1 s'appuyant sur (C1) est égal à: $\Phi_{21} = \iint_{S1} \vec{B}_2 \cdot \vec{dS}_1$
- Le flux du champ magnétique \vec{B}_1 , créé par (C1) à travers la surface S2 s'appuyant sur (C2) est égal à: $\Phi_{12} = \iint_{S2} \vec{B}_1 \cdot \vec{dS}_2$
- le coefficient d'inductance mutuelle de (C1) et (C2) est défini par :
$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} \quad \text{et} \quad M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1}$$

Avec I_2 le courant traversant (C2) et I_1 le courant traversant (C1)

a) Le théorème de Neumann

Le théorème de Neumann stipule l'égalité entre les mutuelles inductances. Ainsi, deux circuits voisins induisent l'apparition d'une f.é.m. liée au flux mutuel: ils sont couplés par une **mutuelle inductance M**.

$$M = M_{12} = M_{21}$$

- M: dépend de paramètres géométriques des circuits (C1) et (C2)
- M: est algébrique dont le signe dépend du sens d'orientation de (C1) et (C2)
- M s'exprime en Henrys H

On montre que $M = M_{12} = M_{21}$:

$$\text{On a } \Phi_{21} = \iint_{S_1} \vec{B}_2 \cdot \vec{dS}_1$$

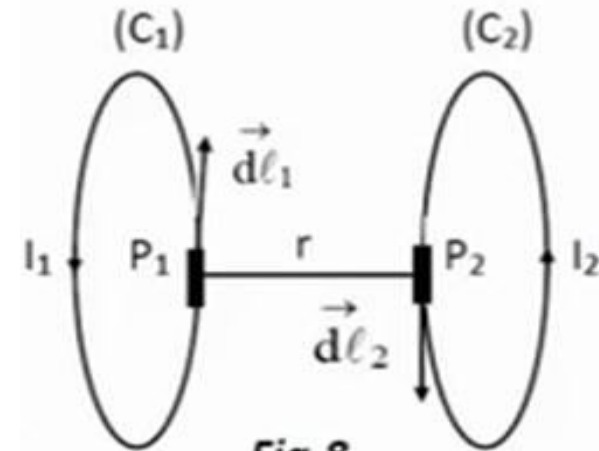
Si on introduit le potentiel vecteur \vec{A}_2 dont dérive \vec{B}_2 on a :

$$\Phi_{21} = \iint_{S_1} \vec{B}_2 \cdot \vec{dS}_1 = \iint_{S_1} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}_2 \cdot \vec{dS}_1 = \oint_{C_1} \vec{A}_2 \cdot \vec{dl}_1 \quad (\text{Th de Stokes})$$

$$\text{Avec } \vec{A}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{\vec{dl}_2}{r}$$

$$\text{Donc } \Phi_{21} = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\vec{dl}_1 \vec{dl}_2}{r} = M_{21} \cdot I_2$$

$$\text{On en déduit } M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\vec{dl}_1 \vec{dl}_2}{r}$$



De la symétrie de l'expression trouvée , il résulte que:

$$M_{21} = M_{12} = M$$

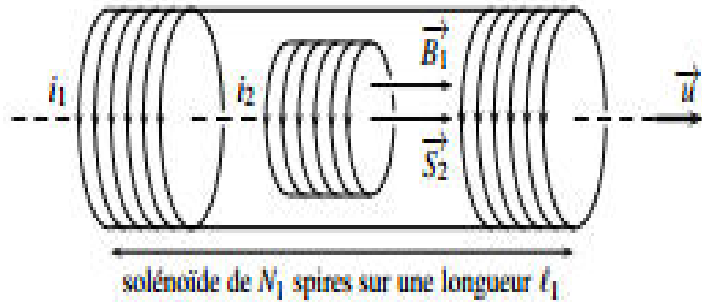
Soit

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\vec{dl}_1 \vec{dl}_2}{r}$$

La formule de Neumann

Exemple 1: calcul d'une inductance mutuelle:

On cherche à établir l'expression de l'induction mutuelle M entre un solénoïde 1, de longueur l_1 et constitué de N_1 spires, et un solénoïde 2, constitué de N_2 spires, placé à l'intérieur du solénoïde 1.



- Les solénoïdes 1 et 2 ont le même axe, dirigé par le vecteur unitaire \vec{u}
- Les spires du solénoïde 2 ont une surface S_2 .
- le sens conventionnel positif du courant choisi est celui lié au vecteur u par la règle de la main droite.

Soit $n_1 = \frac{N_1}{l_1}$ le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde 1, Alors le champ magnétique créé par ce solénoïde a pour expression:

$$\vec{B}_1 = \mu_0 n_1 i_1 \vec{u} = \mu_0 \frac{N_1}{l_1} i_1 \vec{u}$$

Le flux de ce champ à travers une spire du solénoïde 2, de vecteur surface $\vec{S}_2 = S_2 \vec{u}$, est:

$$\varphi_{12} = \vec{B}_1 \cdot \vec{S}_2 = \left(\mu_0 \frac{N_1}{l_1} i_1 \vec{u} \right) \cdot (S_2 \vec{u}) = \mu_0 \frac{N_1}{l_1} i_1 S_2$$

Son flux à travers le solénoïde 2 est:

$$\Phi_{12} = N_2 \cdot \varphi_{12} = \mu_0 \frac{N_2 N_1}{l_1} i_1 S_2$$

On identifié alors l'expression de l'auto-inductance:

$$\Phi_{12} = M \cdot i_1 = \mu_0 \frac{N_2 N_1}{l_1} i_1 S_2 \quad \text{donc } \mathbf{M} = \mu_0 \frac{N_2 N_1}{l_1} S_2$$

Exemple 2: coefficient d'inductance mutuelle d'un fil infini et un cadre.

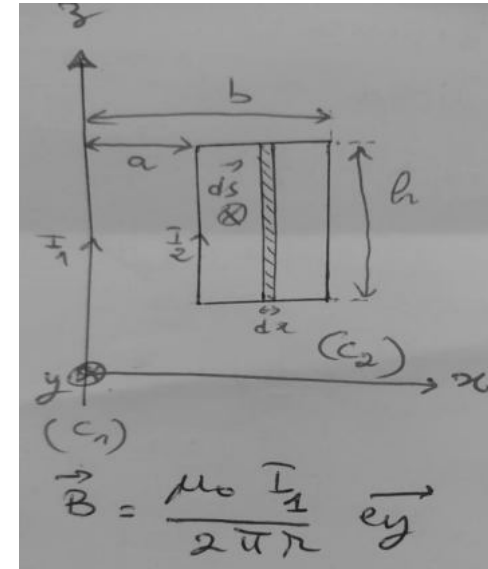
\vec{B} créé par le fil est uniforme sur la tranche d'épaisseur dr

$\vec{\Phi}_{21}$: le flux à travers la tranche

On a
$$d\Phi_{21} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r} \cdot ds = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi} \cdot h \cdot \frac{dr}{r}$$

Donc
$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi} h \ln \frac{b}{a}$$

$$M = \frac{\Phi_{21}}{i_1} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi} \cdot h \cdot \ln \frac{b}{a} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot h \cdot \ln \frac{b}{a}$$



$$dS = h \cdot dr$$

Remarque: si on change le sens du courant dans le cadre, on aura

$$M = - \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot h \cdot \ln \frac{b}{a}$$

Démonstration:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 \vec{I}_1}{2\pi x} \vec{e}_y$$

$$d\vec{s} = ds (-\vec{e}_y)$$

$$d\vec{s} = -dx dz \vec{e}_y$$

$$\Phi_{21} = \iint_{\text{Surface } S \text{ appuie sur } (C_2)} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s}$$

$$\Phi_{21} = \int_a^b \int_c^{l+c} -\frac{\mu_0 \vec{I}_1}{2\pi x} dx dz$$

$$\Phi_{21} = -\frac{\mu_0 \vec{I}_1}{2\pi} \int_a^b \frac{dx}{x} \int_c^{l+c} dz$$

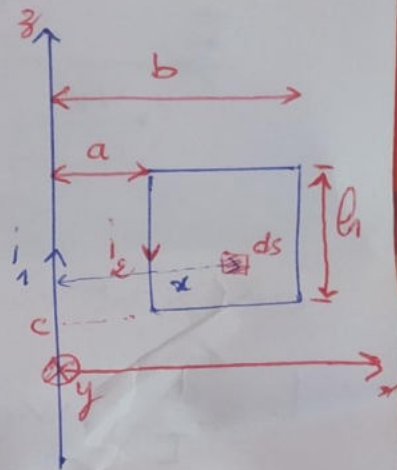
$$\Phi_{21} = -\frac{\mu_0 \vec{I}_1}{2\pi} \cdot l \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Donc

$$M = \frac{\Phi_{21}}{\vec{I}_1} = \frac{-\mu_0 \vec{I}_1 \cdot l \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{\vec{I}_1}$$

$$M = -\frac{\mu_0}{2\pi} \cdot l \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Donc M : grandeur algébrique



b) Forces électromotrices induites dans des circuits couplés par mutuelle induction

Soit deux circuits (C1) et (C2) couplés par mutuelle induction. Le flux magnétique à travers le circuit (C1) est la somme de deux termes:

Le flux de son propre champ \vec{B}_1 qui s'écrit : $\Phi_{1,p} = L_1 i_1$

où L_1 est le coefficient d'auto-induction du circuit 1.

Le flux Φ_{21} du champ \vec{B}_2 du circuit 2: $\Phi_{21} = M i_2$

Le flux total à travers le circuit 1 est donc: $\Phi_1 = \Phi_{1,p} + \Phi_{21} = L_1 i_1 + M i_2$

- La f.é.m induite dans ce circuit (C1) est alors d'après la loi de Faraday :

$$e_1(t) = -\frac{d\Phi_1}{dt} \quad \text{soit} \quad e_1(t) = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

Le flux total à travers le circuit 2 est donc: $\Phi_2 = \Phi_{2,p} + \Phi_{12} = L_2 i_2 + M i_1$

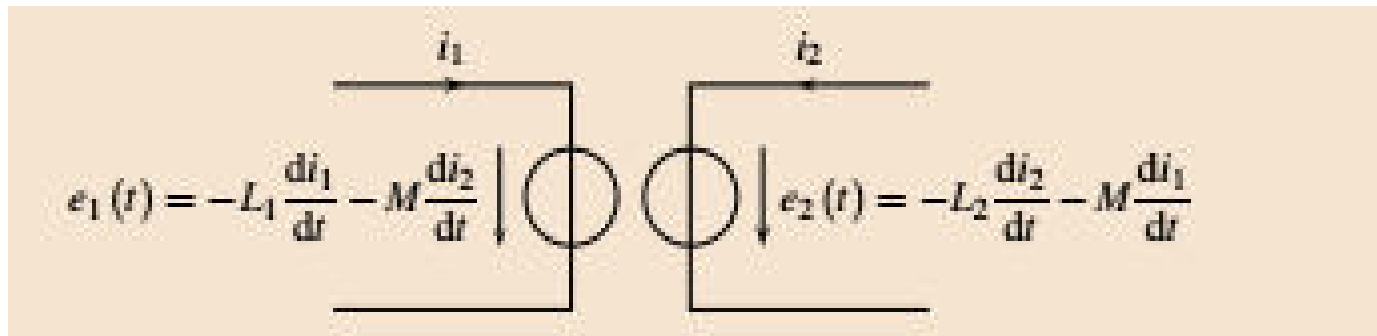
- La f.é.m induite dans ce circuit (C2) est alors d'après la loi de Faraday :

$$\text{Donc } e_2(t) = -\frac{d\Phi_2}{dt} \quad \text{soit} \quad e_2(t) = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

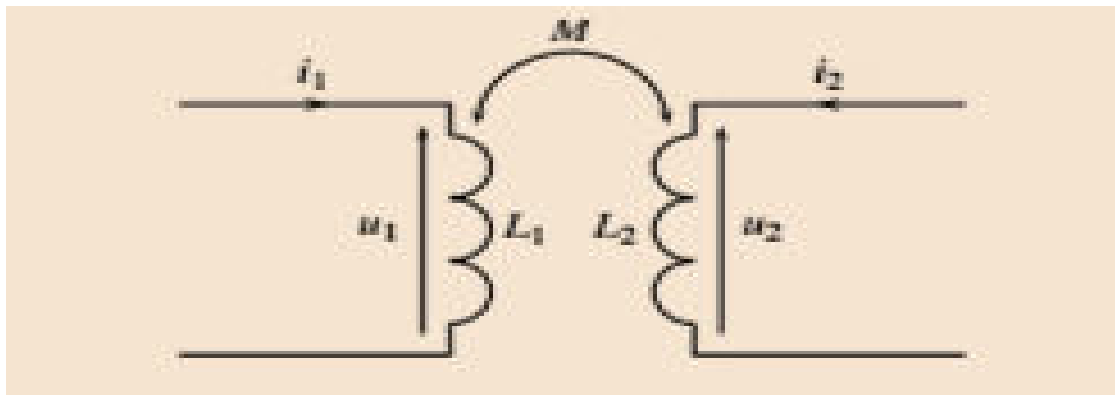
c) Schéma électrique

Pour tenir compte des phénomènes d'induction dans les deux circuits on a deux possibilités :

- On incorpore dans les schémas des circuits 1 et 2 des générateurs tension de f.é.m. respectives $e_1(t) = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$ et $e_2(t) = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$ avec leurs flèches *dans le sens conventionnel positif du courant*, soit en convention générateur.



- On représente les circuits en plaçant entre eux le quadripôle (composant relié par quatre fils). Le schéma électrique représentant deux bobines idéales couplées par mutuelle inductance est :



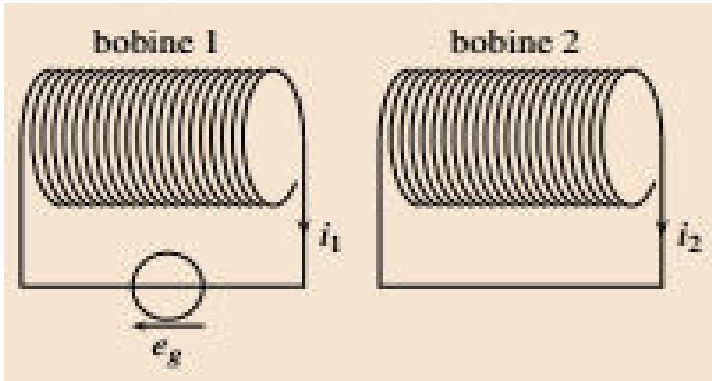
Il correspond aux lois :

$$u_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

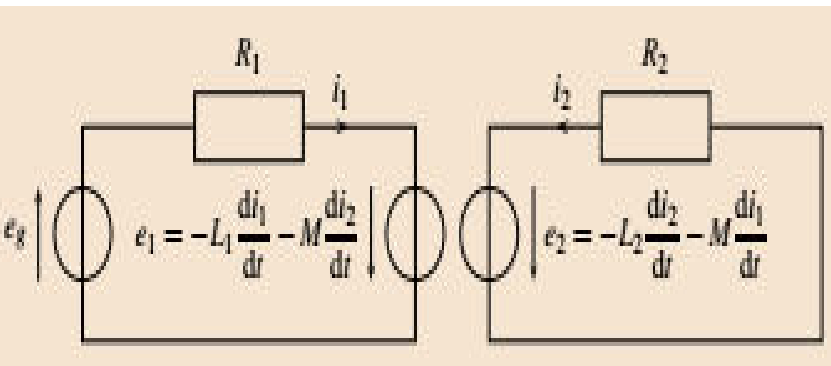
d) Étude de deux circuits couplés

- L'expérience étudiée est la suivante:



Deux circuits en mutuelle induction

- ❖ **Première méthode:** deux circuits séparément, en incorporant dans chacun les générateurs induits.



Soit

$$\left\{ \begin{array}{l} e_g(t) - R_1 i_1(t) + e_1(t) = 0 \\ e_2(t) - R_2 i_2(t) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e_g(t) = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ 0 = R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{array} \right.$$

- Équations électriques

- on représente le schéma électrique de l'expérience
- les bobines ne sont pas idéales et qu'elles ont des résistances R_1 et R_2

les équations vérifiées par les intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$

❖ **Deuxième méthodes:** la schématisation des bobines couplées par mutuelle inductance :

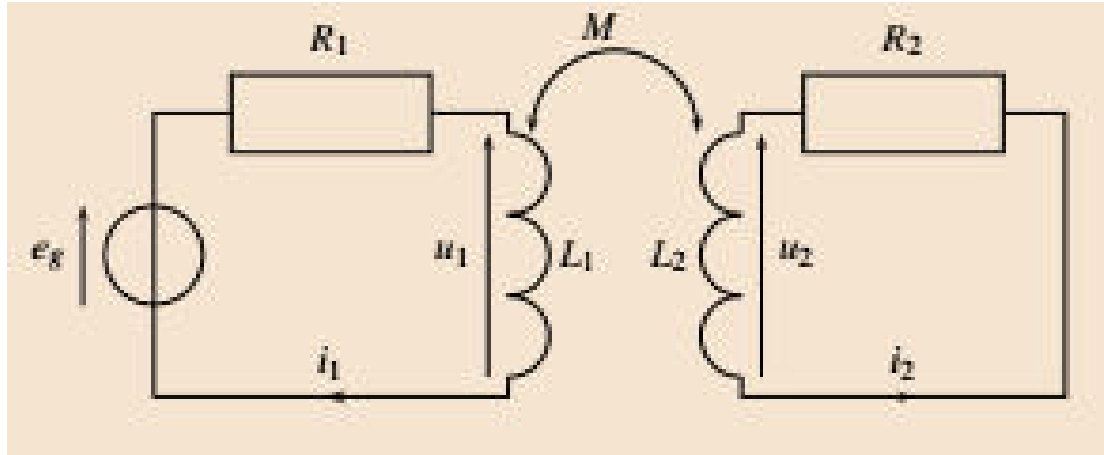


Schéma électrocinétique de deux circuits couplés

la loi des mailles dans chacun des circuits et les lois des bobines couplées :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_g(t) - R_1 i_1(t) + u_1(t) = 0 \\ u_2(t) - R_2 i_2(t) = 0 \\ u_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} e_g(t) = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ 0 = R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{array} \right.$$

Les deux méthodes conduisent au même système de deux équations différentielles couplées pour les intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$

e) Bilan d'énergie

On a:
$$\begin{cases} e_g(t) = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ 0 = R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Multiplions les équations du système par $i_1(t)$ et $i_2(t)$ respectivement :

$$\begin{cases} e_g(t)i_1(t) = R_1 i_1^2(t) + L_1 \frac{di_1}{dt} i_1(t) + M \frac{di_2}{dt} i_1(t) \\ 0 = R_2 i_2^2(t) + L_2 \frac{di_2}{dt} i_2(t) + M \frac{di_1}{dt} i_2(t) \end{cases}$$

Additionnons ces équations :

$$e_g(t)i_1(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) \right) + R_1 i_1^2(t) + R_2 i_2^2(t) + \underbrace{M \frac{di_1}{dt} i_2(t) + M \frac{di_2}{dt} i_1(t)}_{= \frac{d}{dt} (M i_1(t) i_2(t))}$$

Soit:

$$e_g(t)i_1(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) + M i_1(t) i_2(t) \right) + R_1 i_1^2(t) + R_2 i_2^2(t)$$

Cette égalité fait apparaître deux puissances interprétables :

$P_g(t) = e_g(t)i_1(t)$: La puissance cédée par le générateur

$P_{joule}(t) = R_1 i_1^2(t) + R_2 i_2^2(t)$: La puissance perdue par effet Joule dans les deux circuits

Ainsi:

$$P_g(t) - P_{joule}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) + M i_1(t) i_2(t) \right)$$

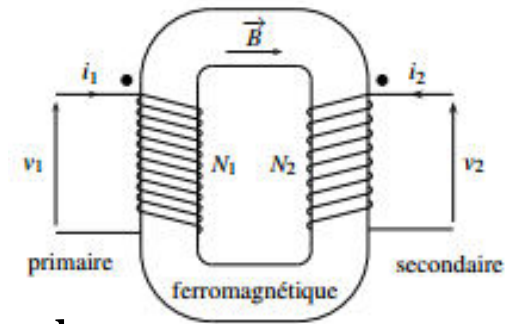
L'énergie magnétique stockée par deux circuits couplés par mutuelle induction, est :

$$E_{mag} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) + M i_1(t) i_2(t)$$

6. 3 Transformateur de tension

a. Constitution

Un **transformateur** est un appareil qui modifie l'amplitude de tensions et de courants alternatifs

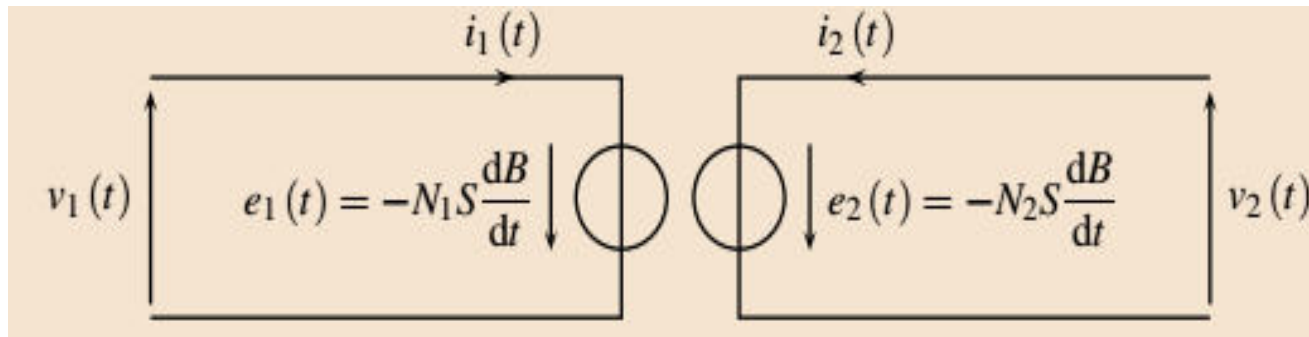


- Il se compose d'une carcasse **ferromagnétique** et de deux enroulements.
- Le **primaire** se constitue de N_1 spires, il reçoit l'énergie électrique que restitue à la charge l'enroulement secondaire, qui est constitué de N_2 spires

b. Principe de fonctionnement

- Le flux de $\vec{B}(t)$ à travers une section droite est donc $B.S$
- Le flux total à travers les N_1 spires du primaire est donc $\Phi_1 = N_1 B S$,
- Le flux au secondaire est $\Phi_2 (t) = N_2 B S$
- Les f.é.m. induites au primaire et au secondaire sont alors :

$$e_1 = - \frac{d\Phi_1}{dt} = - N_1 S \frac{dB}{dt} \quad \text{et} \quad e_2 = - \frac{d\Phi_2}{dt} = - N_2 S \frac{dB}{dt}$$



Circuit électrique équivalent du transformateur.

$$V_1(t) = -e_1(t) \quad \text{et} \quad V_2(t) = -e_2(t)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1(t) = N_1 S \frac{dB}{dt} \\ v_2(t) = N_2 S \frac{dB}{dt} \end{array} \right. \text{ implique } \frac{v_2(t)}{v_1(t)} = \frac{N_2}{N_1} = m, \quad \text{où } m = \frac{N_2}{N_1} \text{ est le rapport de transformation.}$$

Les tensions primaire et secondaire, dans un transformateur en régime alternatif, sont reliées par le **rapport de transformation** m :

$$\frac{v_2(t)}{v_1(t)} = \frac{N_2}{N_1} = m.$$

PS: La formule précédente n'est valable que pour des tensions alternatives